Curso 2006-2007

ANÁLISIS COMPLEJO

FUNCIONES HOLOMORFAS DADAS POR SERIES Y PRODUCTOS.

Objetivos:

1.- Recordar el T^{ma} de los Residuos. Utilizarlo para sumar series por el método de los residuos.

2.- Definir y entender el concepto de serie uniformemente convergente sobre compactos de funciones meromorfas $\sum f_n$: demostrar el T^{ma} de Mittag-Leffler: si $\{z_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{C}$ discreto y P_n es una sucesión de polinomios con $P_n(z_n)=0$, existe $f\in\mathcal{M}(\mathbb{C})$ tal que $P(f)=\{z_n : n\in\mathbb{N}\}$ y la parte singular de f en z_n es $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$.

3.- Demostrar que toda función meromorfa en $\mathbb{C}$ se puede escribir como una holomorfa más una $\sum_{n=1}^{\infty}$ de funciones meromorfas elementales: desarrollo de Mittag-Leffler.

4.- Estudiar desarrollos de Mittag-Leffler de funciones concretas:

$$\pi\cot g\,\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\qquad \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,2z}{z^2-n^2}.$$

5.- Definir productos infinitos de n^{os} y de funciones. Demostrar el T^{ma} de Weierstrass: dada $\{z_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{C}$ discreto, existe $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ t.q. $Z(f)=\{z_n : n\in\mathbb{N}\}$ y cada z_n tiene multiplicidad prescrita.

6.- Demostrar que toda función holomorfa se puede factorizar a través de un $\prod_{n=1}^{\infty}$ en el que intervienen sus ceros.

7.- Probar que si $f\in\mathcal{M}(\mathbb{C})$, entonces existen $g,h\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ t.q. $f=g/h$.

8.- Estudiar las funciones especiales:

✓ $$\Gamma(z)=\frac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+z}e^{z/n}$$

✓ $$\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}$$

✓ $$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}\quad \operatorname{Re} z>1 \text{ y sus extensiones.}$$

Recordatorio T^{ma} Residuos y sumación de series por el método de los residuos.

Definición (Función meromorfa).- $\Omega\subset\mathbb{C}$ abierto. Una función $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}_\infty$ se dice que es meromorfa en Ω si existe $A\subset\Omega$ tal que:

i) $A'\cap\Omega=\phi$;

ii) $f\in\mathcal{H}(\Omega\setminus A)$

iii) f tiene un polo en cada punto $a\in A$.

Observaciones:

a.- En la definición admitimos $A = \phi$, en cuyo caso, las funciones holomorfas son meromorfas.

b.- $\mathcal{M}(\Omega)$ denota el conjunto de las funciones meromorfas.

c.- Toda funcion $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ meromorfa es continua.

d.- $(\mathcal{M}(\Omega), +, \cdot)$ es un cuerpo.

e.- En particular si Ω es conexo y $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $g \not\equiv 0 \rightsquigarrow f/g \in \mathcal{M}(\Omega)$.

f.- Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ denotamos $P(f)$, $Z(f)$ respectivamente los polos y ceros: además $m(a,f)$ denota la multiplicidad

Teorema Residuos.- Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $M \subset \Omega$ tal que $M' \cap \Omega = \phi$. Para cada ciclo Γ en Ω que es Ω-homólogo a cero y con Imagen$(\Gamma) \cap M = \phi$, y para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus M)$ se tiene que

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{Res}(f, a) \cdot \operatorname{Ind}(\Gamma, a)$$

donde la suma es de soporte finito.

27/09/2006

NOTA: ✓ el T^{ma} de los residuos se aplica en particular a funciones meromorfas y a ciclos Ω-homólogos a cero que no pasan por los polos de la función.

✓ Ejemplos de residuos:

- si f tiene una singularidad evitable en a, entonces $\operatorname{Res}(f,a) = 0$.
- si f tiene un polo de orden m en a, entonces

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{ (z-a)^m \frac{f(z)}{g(z)} \right\}$$

- Ejemplo: $f, g \in \mathcal{H}(D(a,r))$ $\quad g(a) = 0 \quad g'(a) \neq 0 \rightsquigarrow f/g \in \mathcal{H}(D^*(a,r))$

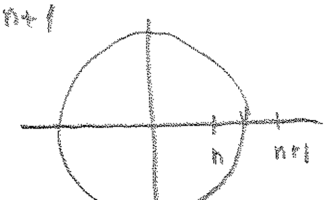
$$\operatorname{Res}(f/g, a) = f(a)/g'(a).$$

✓ Aplicación del T^{ma} Residuos: cálculo de integrales, por ejemplo,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \operatorname{sen} x)\,dx = 2\pi i \sum_{a \in D(0,1)} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{iz} R\left(\tfrac{1}{2}(z + 1/z), \tfrac{1}{2i}(z - 1/z)\right), a \right)$$

Otra aplicación natural del T^{ma} Residuos es la sumación de series.

Definición.- Llamaremos función sumadora a toda función meromorfa $\alpha: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ que tiene polos simples y cuyo conjunto de polos es $\mathbb{Z}$ y que permanece acotada en $\bigcup \{ z \in \mathbb{C} : |z| = R_n \}$ donde $n < R_n < n+1$



Ejemplos:

✓ $\alpha(z)=\pi \cot g \pi z$ tiene polos simples en los enteros $\mathrm{Res}(f,n)=1$

y si $0<\delta<1/2$ entonces f está acotada en $\mathbb{C}\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} D(n,\delta)$.

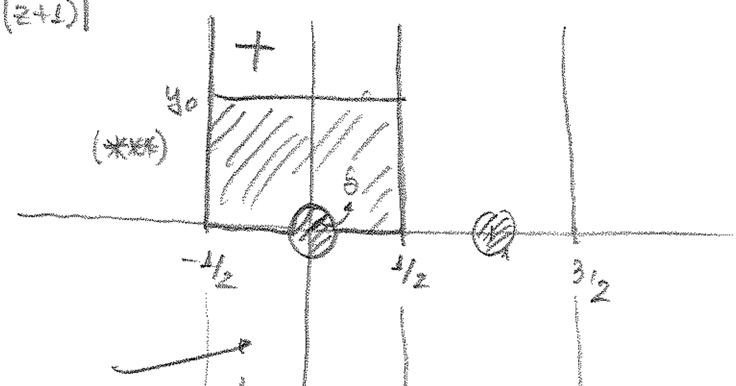
✓ $\alpha(z)=\dfrac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}$ tiene polos simples en $\mathbb{Z}$ y $\mathrm{Res}(f,n)=(-1)^n$ y también está acotada en $\mathbb{C}\setminus\bigcup_{n=1}^{+\infty} D(n,\delta)$ para $0<\delta<1$.

= Hacemos los cálculos con $\dfrac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}=f(z)$

• $\mathrm{Res}\left(\dfrac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z},n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\pi\dfrac{(z-n)}{\operatorname{sen}\pi z}=\lim\limits_{z\to n}\cancel{\pi}\dfrac{1}{\cancel{\pi}\cos\pi z}=\dfrac{1}{\cos\pi n}=(-1)^n$

• Por otro lado: $\alpha(z+1)=\dfrac{\pi}{\operatorname{sen}\pi(z+1)}=\dfrac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z\cdot\cos\pi+\cancel{\cos\pi z\operatorname{sen}\pi}}=-\dfrac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}$.

$|\alpha(z)|=|\alpha(z+1)|$



encontramos una acotación en la banda indicada, ~~tendremos~~ una acotación en $\mathbb{C}\setminus\bigcup D(n,\delta)$. Observar que si $|\alpha(z)|=|\alpha(-z)|$, luego es suficiente acotar en la parte superior de la banda +. Por otro lado se tiene que,

$$|\alpha(z)|=\left|\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}\right|=\left|\frac{\pi}{\frac{e^{\pi i z}-e^{-\pi i z}}{2i}}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{\pi}{e^{\pi i(x+iy)}-e^{-\pi i(x+iy)}}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{\pi}{e^{-\pi y+\pi i x}-e^{\pi y-i\pi x}}\right|\overset{(*)}{\leq}\frac{1}{2}\frac{\pi}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}\xrightarrow{(**)}0$$

(*) $|e^{-\pi y+\pi i x}-e^{\pi y-i\pi x}|=|e^{\pi y-i\pi x}-e^{-\pi y+\pi i x}|\geq\big||e^{\pi y-i\pi x}|-|e^{-\pi y+\pi i x}|\big|\geq|e^{\pi y}-e^{-\pi y}|=$
$\underset{y>0}{=}e^{\pi y}-e^{-\pi y}$

(**) $\to\ \exists\ y_0$ t.q. $y>y_0$ si $\underset{-1/2\leq x\leq 1/2}{z=x+iy}\ \to\ |f(z)|\leq M$

por otro lado $|\alpha|$ está acotada en el conjunto (***) rayado y en consecuencia f está acotada.

Proposición.- Sea $f = P/Q$ una fracción racional tal que $P(f)\cap \mathbb{Z} = \phi$. Si α es una función sumadora que cumple la condición:

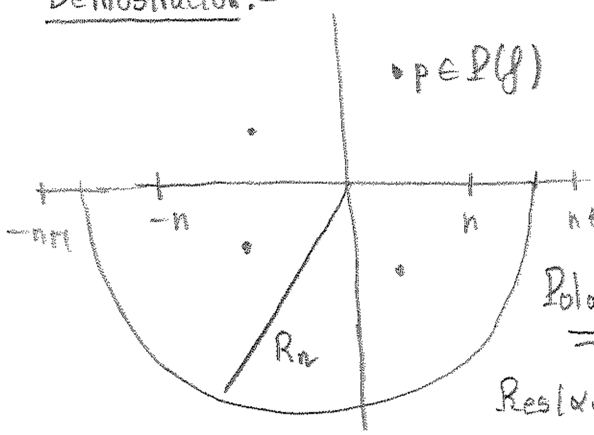
a) $$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \alpha(z)\cdot f(z)\,dz = 0 \quad \text{donde} \quad C_n(\theta) = R_n e^{i\theta} \quad \theta\in[0,2\pi].$$

entonces se verifica que,

b) $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{|k|\le n} \alpha_k \cdot f(k) = -\sum_{p\in P(f)} Res(\alpha\cdot f, p)$$

donde $\alpha_k = Res(\alpha, k)$ para $k\in\mathbb{Z}$.

Demostración.-



Tomamos n suficientemente grande

$Polos(f) \subset D(0,R_n)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \alpha(z) f(z)\,dz = \sum_{a\in sing(\alpha\cdot f)} Res(\alpha\cdot f, a)\cdot Ind(C_n,$$

$\underline{Polos(\alpha\cdot f)\subset \mathbb{Z}\cup P(f)}$ $$\sum_{|k|\le n}\alpha_k f(k) + \sum_{p\in P(f)} Res(\alpha\cdot f, p).$$

$$\underset{k\in\mathbb{Z}}{Res(\alpha\cdot f, k)} = \lim_{z\to k} (z-k)\alpha(z)\cdot f(z) = \alpha_k\cdot f(k)$$

Si utilizamos a) queda probado b). #

NOTA: ✓ Buscamos entonces condiciones que aseguren a)

✓ cambiamos, si sabemos $\sum_{|k|=-\infty}^{+\infty} \alpha_k f(k)$ es convergente, el cálculo de su suma por el cálculo de una cantidad finita de residuos y $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_k f(k) = -\sum_{p\in P(f)}\dots$

Proposición.- Sea $f = P/Q$ una fracción racional y α una función sumadora. Si

$$Grado(Q) - Grado(P) \geq 2$$

entonces se verifica la condición (a) de la proposición anterior, y consecuentemente,

$$v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Res(\alpha,k)\cdot f(k) = -\sum_{p\in Polo(f)} Res(\alpha\cdot f, p) \quad \circledast$$

Si además $\{Res(\alpha,k)\}$ está acotada entonces $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Res(\alpha,k) f(k)$ es absolutamente convergente y su suma viene dada por $\circledast$.

Dem.- $$\exists \lim_{z\to\infty} z^2\cdot f(z)\in\mathbb{C} \leadsto \exists\, C>0 \text{ t.q. } |f(z)| < \frac{C}{|z|^2} \text{ si } |z|>\rho.$$

$$\left|\int_{C_n}\alpha(z)f(z)\,dz\right| \underset{n>\rho}{\le} \frac{C\cdot M}{(n+1/2)^2}\, 2\pi(n+1/2) \longrightarrow 0 \quad n\to+\infty$$

donde $M = \sup\{|\alpha(z)| : |z| = R_n\}$.

La convergencia de la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Res(\alpha,k) f(k)$ se sigue de que si

$|Res(\alpha,k)|\le N$ entonces $|Res(\alpha,k) f(k)| \le \frac{N\cdot C}{|k|^2}$ si $|k|>\rho$

2/09/2006 Otra situación en la que podemos utilizar el mismo tipo de ideas es:

Proposición.- Si $f = P/Q$ y α es una función sumadora tal que:

(i) α es impar.

(ii) $\text{grado}(Q) - \text{grado}(P) \geq 1$

entonces se satisface la condición (a) que garantiza $\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \alpha(z) f(z)\, dz = 0$.

Demostración.- Lo que vamos a hacer es encontrar una función meromorfa g (fracción racional) tal que $\lim_{z\to\infty} z^2 g(z) = 0$ con

$$\int_{C_n} \alpha(z) f(z)\, dz = \int_{C_n} \alpha(z) g(z)\, dz.$$

Si ahora tenemos en cuenta la proposición anterior es claro que $\int_{C_n} \alpha(z) g(z)\, dz \longrightarrow 0$.

Para encontrar g, hacemos lo siguiente: como $\lim_{z\to\infty} z f(z) \in \mathbb{C} \leadsto$

$$\frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots \quad \text{si } 0 < |z| < \varepsilon$$

luego,

$$z f(z) = a_0 + a_1/z + \dots + a_n/z^n + \dots \quad \text{si } |z| > 1/\varepsilon.$$

Así $g(z) = \frac{1}{z}(z f(z) - a_0) = \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \dots$ siendo pues $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ fracción con $\lim_{z\to\infty} z^2 g(z) \in \mathbb{C}$

Por otro lado tenemos:

$$\int_{C_n} \alpha(z) g(z)\, dz = \int_{C_n} \alpha(z) f(z)\, dz - a_0 \int_{C_n} \frac{\alpha(z)}{z}\, dz$$

Observar que $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\alpha(z)}{z}\, dz = \sum_{|k|\leq n} \text{Res}\left(\frac{\alpha(z)}{z}, k\right)$.

$-k, k \neq 0$ $\quad \frac{\alpha(z)}{z}$ tiene polo simple y si calculamos:

$$\text{Res}(\alpha, -k) = \lim_{z\to -k} (z+k)\alpha(z) = \lim_{w\to k} (-w+k)\alpha(-w) = \lim_{w\to k} (-w+k)(-\alpha(w)) =$$

$$= \lim_{w\to k} (w-k)\alpha(w) = \text{Res}(\alpha, k).$$

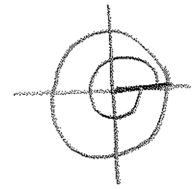
$-k, k \neq 0$ $\quad \text{Res}\left(\frac{\alpha(z)}{z}, k\right) = \lim_{z\to k} (z-k)\frac{\alpha(z)}{k} = \frac{\text{Res}(\alpha, k)}{k} = -\frac{\text{Res}(\alpha, -k)}{-k} = -\text{Res}\left(\frac{\alpha(z)}{z}, -k\right)$

$k = 0$ $\quad \frac{\alpha(z)}{z} = \frac{a_{-2}}{z^2} + a_0 + a_2 z^2 + \dots \leadsto \text{Res}\left(\frac{\alpha(z)}{z}, 0\right) = 0.$ #

par doble

Ejemplo.- $\alpha(z) = \pi \operatorname{cotg} \pi z$ es una función sumadora con $\operatorname{Res}(\alpha, k) = 1$ para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Ciertamente, $\lim_{z \to k} \pi(z-k) \dfrac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} = \lim_{z \to k} \pi(z-k) \dfrac{\cos \pi(z-k)}{\operatorname{sen} \pi(z-k)} = (*)$



$$\frac{\cos \pi(z-k)}{\operatorname{sen} \pi(z-k)} = \frac{\cos \pi z \cdot \cos \pi k - \operatorname{sen} \pi z \cdot \overbrace{\operatorname{sen} \pi k}^{=0}}{\operatorname{sen} \pi z \cdot \cos \pi k + \cos \pi z \cdot \underbrace{\operatorname{sen} \pi k}_{0=}}.$$

$$(*) = \lim_{w \to 0} \pi w \frac{\cos \pi w}{\operatorname{sen} \pi w} = \lim_{w \to 0} \pi w \frac{1 - \frac{(\pi w)^2}{2!} + \frac{(\pi w)^4}{4!} - \cdots}{\pi w - \frac{(\pi w)^3}{3!} + \cdots} = 1.$$

$f(z) = \dfrac{1}{(z+a)^2}$ $a \notin \mathbb{Z}$. Utilizamos las proposiciones de antes y tenemos que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+a)^2} = -\operatorname{Res}\left(\frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{(z+a)^2}, -a \right)$$

$$\left((z+a) \frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{(z+a)^2} \right)'_{z=-a} = (\pi \operatorname{cotg} \pi z)'_{z=-a} = \left(\frac{\pi \cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} \right)'_{z=a} = -\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi a}.$$

Así obtenemos la fórmula $\dfrac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi a} = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+a)^2}$

En particular para $a = 1/2$ se tiene

$$\left.\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1/2)^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{(2n+1)^2} \\ \sum_{n=-1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1/2)^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1/2)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{(2n+1)^2} \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi/2} = \pi^2$$

Por otro lado $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \pi^2/8 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \frac{\pi^2/8}{1 - 1/4} = \pi^2 \frac{1/8}{3/4} = \pi^2/6 \quad \#$$

Algún ejemplo más:

$\alpha(z) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$ $\quad f(z) = \dfrac{1}{a-z}$ $(a \notin \mathbb{Z})$ deducir que

$$\text{v.p.} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{a-n} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a}$$

y a partir de aquí

$$\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2a}{a^2 - n^2} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a} \quad \#$$

Convergencia de una serie de funciones meromorfas. Tma de Mittag-Leffler

Definición.- Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $(f_n)_n$ una sucesión en $\mathcal{M}(\Omega)$. Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ es uniformemente convergente sobre compactos si para cada compacto $K \subset \Omega$ existe un $m(K) \in \mathbb{N}$ tal que:

(i) $P(f_n) \cap K = \emptyset$ para cada $n \geq m(K)$

(ii) $\sum_{n=m(K)}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente sobre K.

Observaciones.-

1.- En las condiciones de la definición anterior el conjunto $M = \bigcup \{P(f_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es discreto en Ω ⇐ efectivamente, si $a \in \Omega$ tomamos $K = \overline{D(a,r)} \subset \Omega$ y por la definición, K sólo corta a $P(f_1) \cap P(f_2) \cap \dots \cap P(f_{m(K)})$; ahora bien como cada $P(f_n)$ es discreto en Ω y K es compacto $\rightsquigarrow$ K sólo puede cortar a cada $P(f_i)$ en una cantidad finita $\rightsquigarrow$ podemos tomar $0<\rho<r$ t.q. $D(a,\rho) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m(K)} P(f_i) \right) = \emptyset \rightsquigarrow D(a,\rho) \cap M = \emptyset$ y así $M' \cap \Omega = \emptyset$.

2.- En el abierto $\Omega_0 = \Omega \setminus M$ la serie converge uniformemente sobre compactos y así por el teorema de Weierstrass, la serie define en Ω_0 una función holomorfa. Obsérvese que cada $a \in M$ es una singularidad aislada, que es o evitable o un polo. De esta forma la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ define en Ω una función meromorfa.

3.- La noción de convergencia que hemos introducido implica la convergencia de las sumas parciales $\left(\sum_{n=1}^{m} f_n \right)_{m=1}^{\infty}$ en $(C(\Omega, \mathbb{C}_\infty), \tau_K)$.

Teorema de Mittag-Leffler, 1877.- Sea $M \subset \mathbb{C}$ un conjunto sin puntos de acumulación en $\mathbb{C}$. Para cada $a \in M$, sea P_a un polinomio no nulo con $P_a(0) = 0$. Entonces, existe $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con $P(f) = M$ de forma que $P_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$ es la parte singular de f en a para cada $a \in M$. Más concretamente, si

(i) M es finito, podemos tomar $f(z) = \sum_{a \in M} P_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$.

(ii) Si M es infinito y ordenamos sus elementos según módulos crecientes

$$0 = |z_0| < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots \quad \text{con } \lim_n |z_n| = +\infty$$

y desarrollamos

$$P_{z_n}\left(\frac{1}{z-z_n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{nk} z^k \qquad |z| < |z_n| \quad n \geq 1,$$

se puede determinar una sucesión $(k_n)_n$ en $\mathbb{N}$ tal que

$$f(z) = P_0\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(P_{z_n}\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - \sum_{k=0}^{k_n} a_{nk} z^k \right)$$

es una serie de funciones meromorfas que converge uniformemente sobre compactos y que satisface las condiciones requeridas. (se supone que $|z_1| > 0$ y $z_0 = 0$ sólo interviene si $0 \in M$).

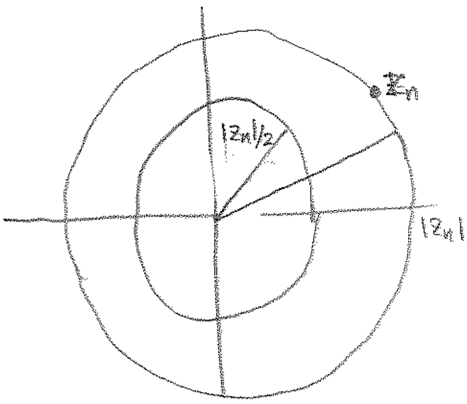
Demostración.-

El caso en el que M es finito es claro

El caso en el que M es infinito, es claro que podemos escribir.

$$0 = |z_0| < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots \qquad \lim_n |z_n| = +\infty$$

Si $n \geq 1$, y $|z| < |z_n|$ podemos escribir $P_{z_n}\left(\frac{1}{z-z_n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z^k \quad |z| < |z_n|$



Entonces, para $|z| \leq |z_n|/2$ la serie anterior converge uniformemente, lo que implica que para cierto $k_n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\circledast \quad \left| P_{z_n}\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - \sum_{k=1}^{k_n} a_{nk} z^k \right| \leq 1/2^n \qquad n \geq 1, 2, \dots \quad |z| \leq |z_n|/2.$$

Así, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ P_{z_n}\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - \sum_{k=1}^{k_n} a_{nk} z^k \right\}$.

converge uniformemente sobre compactos; ciertamente si $K \subset \mathbb{C}$, existe n_0 t.q. $n \geq n_0$ $K \subset D(0, |z_n|/2)$. y así.

- $P\left(P_{z_n}\left(\frac{1}{z-z_n}\right) + \sum_{k=1}^{k_n} a_{nk} z^k \right) \cap K = \phi$
- $\circledast$ garantiza por el M-test de Weierstrass que $\sum_{n \geq n_0} \left\{ P_{z_n}\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - \sum_{k=1}^{k_n} a_{nk} z^k \right\}$ converge uniformemente sobre K.

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ P_{z_n}\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - \sum_{k=1}^{k_n} a_{nk} z^k \right\}$ define una función meromorfa cuyos polos son los z_n y las partes singulares en z_n, $P_{z_n}\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$.

Observación.- cualquier $(k_n)_k$ obtenido reemplazando $\frac{1}{2^n}$ por otra serie r_n tal que $\sum_n r_n < +\infty$ nos sirve para demostrar el teorema.

$\boxed{4-10-2006}$

Corolario.- Sea $f \in M(\mathbb{C})$ con polos $P(f) = \{z_n : n = 1, 2, \dots\}$. que se suponen ordenados según módulos crecientes

$$|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea P_n un polinomio con $P_n(0) = 0$ tal que $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ es la parte principal de f en z_n. Entonces existe una función entera $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y una sucesión de polinomios Q_n tales que

$$f(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - Q_n(z) \right] \quad \boxed{*}$$

siendo la serie involucrada uniformemente sobre compactos.

Demostración.- Por el T$^{\underline{ma}}$ Mittag-Leffler podemos encontrar los Q_n de forma que si llamamos

$$h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - Q_n(z) \right].$$

entonces la serie converge uniformemente sobre compactos, $h \in M(\mathbb{C})$ y $P(h) = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ teniendo h y f las mismas partes singulares en cada z_n. Si escribimos $f - h = g$ g tiene singularidades evitables en cada z_n y así podemos considerarle $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

#

Una de las cuestiones con los desarrollos de Mittag-Leffler es determinar los polinomios $Q_n(z)$ mas sencillos posibles.

Ejercicio.- Encontrar para f tiene polos en $M=\{\overset{o}{z_n} : n\in\mathbb{N}\}$ simples $P_n(z)=z$ buscamos parte singular de f $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)=\frac{1}{z-z_n}$ (polos simples residuo 1): si $K\in\mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|z_n|^K}=+\infty \quad y \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|z_n|^{K+1}}<+\infty$$

entonces puede tomarse $K_n=K-1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ en el t^{ma} Mittag-Leffler, i.e, en el desarrollo

$$\frac{1}{z-z_n}=\sum_{j=0}^{+\infty}a_{nj}z^j$$

$|z|<|z_n|$ tomamos hasta $K-1$ y sabemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-z_n}-\sum_{j=0}^{K-1}a_{nj}z^j\right)$$

converge unif. sobre compactos en $H(\Omega)$

• Observación: $a\neq 0$

$$\frac{1}{z-a}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{potencias } z}}{\overset{|z|<|a|}{=}}-\frac{1}{a\left(1-\frac{z}{a}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{a}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^j=-\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{z^j}{a^{j+1}}.$$

Observemos si tomamos $\sum$ hasta $K-1$, entonces se tiene,

$$\left|\frac{1}{z-a}-\left(-\sum_{j=0}^{K-1}\frac{z^j}{a^{j+1}}\right)\right|\overset{|z|<|a|}{=}\left|-\sum_{j=K}^{+\infty}\frac{z^j}{a^{j+1}}\right|=\left|-\frac{1}{a}\sum_{j=K}^{+\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^j\right|=$$

$$=\left|-\frac{1}{a}\,\frac{(z/a)^K}{1-z/a}\right|=\left|\frac{z^K}{(z-a)a^K}\right|\overset{|z|<|a|/2}{\leq}\frac{|z|^K}{|a|^K\cdot\frac{|a|}{2}}=\frac{2|z|^K}{|a|^{K+1}}$$

Así, como $|z_n|\to+\infty$ si $K\subset G$ compacto y $K\subset D(0,R)\subset D(0,|z_n|/2)$ $n\geq m$ tenemos que

$$\left|\frac{1}{\cancel{z-z_n}}+\frac{1}{z_n}+\frac{z}{(z_n)^2}+\dots+\frac{z^{K-1}}{(z_n)^K}\right|\leq\frac{2R^K}{|z_n|^{K+1}},$$

de donde se concluye lo que queremos.

Ejemplos.- Razonar los desarrollos de Mittag-Leffler que siguen, donde las series convergen es $H(G)$.

(1) $$\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2z}{z^2-n^2}$$

• puede razonarse direct. serie conv. en $H(G)$

• Obsérvese que utilizando que $\alpha(z)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}$ es sumadora y $f(z)=\frac{1}{a-z}$ se deduce la fórmula

$$\text{v.p.}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n}{a-n}=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi a}\qquad a\notin\mathbb{Z}.$$

Cambiando $a\longleftrightarrow z$ en la fórmula anterior se tiene

$$\text{v.p.}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n}{z-n}=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}\qquad z\notin\mathbb{Z}.$$

• Observar $$\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{|k|\leq n}\frac{(-1)^k}{z-k}=\frac{1}{z}+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{z-k}+\frac{(-1)^k}{(z+k)}=$$

• Observar que: $f(z)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}$ Polos$(f)=\mathbb{Z}$, simples, $\operatorname{Res}(f,n)=(-1)^n$.

$$f(z)=g(z)+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{z-n}+\frac{(-1)^n}{n}\right\}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{z+n}-\frac{(-1)^n}{n}\right\}=$$

$g\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ g? $$=g(z)+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\, 2z}{z^2-n^2}.\quad\rightsquigarrow g\equiv 0.$$

(2) $f(z)=\pi\operatorname{cotg}\pi z$ Polos$(f)=\mathbb{Z}$ simples, $\operatorname{Res}(f,n)=1$.

$$\pi\operatorname{cotg}\pi z=g(z)+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right\}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right\}=$$

$g\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ g? $$=g(z)+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right\}=[*].$$

$\alpha(z)=\pi\operatorname{cotg}\pi z$ SUMADORA y $f(z)=\frac{1}{a-z}$ $a\notin\mathbb{Z}$ entonces

$$\text{v.p.}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{a-n}\underset{\uparrow}{=}-\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\operatorname{cotg}\pi z}{a-z},a\right)=-\lim_{z\to a}(z-a)\cdot\frac{\pi\operatorname{cotg}\pi z}{a-z}=+\pi\operatorname{cotg}\pi a$$

α impar

$a\leftrightarrow z$ se tiene
$$\text{v.p.}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{z-n}=\pi\operatorname{cotg}\pi z$$ para $z\notin\mathbb{Z}$ o, lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{z}+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{z-k}+\frac{1}{z+k}\right\}=\pi\operatorname{cotg}\pi z$$ $\rightsquigarrow g(z)=0$ en la fórmula anterior y acabo el desarrollo de Mittag-Leffler.

Podemos completar [*] arriba con:
$$[*]=0+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\qquad\#$$

Productos infinitos de nºs complejos y de funciones holomorfas

Objetivos:

- Demostrar que dado un conjunto discreto $M\subset\mathbb{C}$ y asignado a cada punto $a\in M$, un natural $m_a\in\mathbb{N}$, entonces existe $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ t.q. $Z(f)=M$ y $m(a,f)=m_a$. (Weierstrass).
- Demostrar que cada función entera se factoriza en función de sus ceros
- Encontrar factorizaciones de las funciones clásicas.

Definición.- Sea $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y $\pi_n=\prod_{k=1}^{n}u_k=u_1\cdot u_2\cdots u_n$. Si:

(a) existe $u=\lim_n\pi_n$ y $u\neq 0$, diremos que el producto infinito $\prod_{j=1}^{+\infty}u_j$ es estrictamente convergente y escribiremos $\prod_{n=1}^{+\infty}u_n:=\lim_n\pi_n$.

(b) para algún $m\in\mathbb{N}$, $\prod_{j=m+1}^{+\infty}u_j$ es estrictamente convergente, diremos que el product $\prod^{+\infty}$ es convergente hacia $\prod^{\infty}u_j=u_1\cdot u_2\cdots u_m\cdot\prod^{+\infty}u_j$.